Teoria miary i całki
SPPI IIr. semestr zimowy 2008
KOLOKWIUM 2

26.05.08

We poniższych zadaniach wszystkie miary określone są na ustalonej przestrzeni mierzalnej (X, Σ), na przykład λ oznacza dowolną miarę (a nie tylko miarę Lebesgue'a). Wszelkie zbiory to mierzalne podzbiory X, a funkcje są rzeczywiste, określone na X i mierzalne względem Σ.

Zadanie 1. Korzystając z Twierdzenia Fubiniego wykaż, że dla dowolnej funkcji nieujemnej f mamy

$$\int f\,d\mu = \int_0^\infty \mu\{x : f(x) \geq t\}\,dt$$

(ostatnia całka jest względem miary Lebesgue'a na prostej $\mathbb{R}$).

ROZWIĄZANIE: W produkcie $X \times \mathbb{R}_+$ (na $\mathbb{R}_+$ mamy miarę Lebesgue'a λ) weźmy zbiór $F = \{(x,t) : 0 \leq t \leq f(x)\}$. Miarę produktową tego zbioru liczymy na dwa sposoby przez całki iterowane (Tw. Fubiniego):

$$\int \lambda(F_x)\,d\mu(x) = \int (f(x) - 0)\,d\mu(x) = \int f\,d\mu$$

z drugiej strony jest to

$$\int_0^\infty \mu(F_t)\,dt = \int_0^\infty \mu\{x : 0 \leq f(x) \leq t\}\,dt.$$

Zadanie 2. Dla miar znakowanych $\nu \ll \mu$ oznacza, że $\nu^+ \ll \mu^+$ i $\nu^+ \ll \mu^-$ oraz $\nu^- \ll \mu^+$ i $\nu^- \ll \mu^-$. Dane są dwie dowolne miary znakowane μ_1 i μ_2. Niech $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Wykaż, że jeśli $\mu_1^+ \perp \mu_2^-$ i $\mu_1^- \perp \mu_2^+$ to $\mu_1 \ll \mu$ i $\mu_2 \ll \mu$. Podaj przykład na to, że opuszczenie choćby jednego z tych założeń może zniszczyć obie tezy.

ROZWIĄZANIE: Mamy również $\mu_1^+ \perp \mu_1^-$ oraz $\mu_2^+ \perp \mu_2^-$. Zatem $\mu_1^+ \perp (\mu_1^- + \mu_2^-)$ oraz $\mu_2^+ \perp (\mu_1^- + \mu_2^-)$ i dodając $(\mu_1^+ + \mu_2^+) \perp (\mu_1^- + \mu_2^-)$. Czyli $\mu = (\mu_1^+ + \mu_2^+) - (\mu_1^- + \mu_2^-)$ jest rozkładem miary μ na różnicę miar nieujemnych wzajemnie singularnych. Z jednoznaczności rozkładu Hahna-Jordana wniskujemy, że $\mu^+ = (\mu_1^+ + \mu_2^+)$ oraz $\mu^- = (\mu_1^- + \mu_2^-)$. Jeśli A ma zerową miarę μ^+ to ma zerowe miary μ_1^+ i μ_2^+ i podobnie z minusami. To właśnie oznacza, że μ_1 i μ_2 są absolutnie ciągłe względem μ.

Jako kontrprzykład wziąć dowolną miarę nieujemną ale niezerową μ_1 i położyć $\mu_2 = -\mu_1$. Oczywiście $\mu_2^- = \mu_1^+ \neq 0$, więc nie są to miary wzajemnie singularne (natomiast μ_1^- i μ_2^+ są zerowe, więc są singularne). Natomiast μ jest miarą zerową, więc ani μ_1 ani μ_2 nie są względem niej absolutnie ciągłe.

Zadanie 3. Dana jest miara nieujemna μ i funkcja f taka, że przynajmniej jedna z całek z f^+ i f^- jest skończona. Tworzymy miarę ν jako miarę z gęstością f, tzn.

$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$. (zapisujemy to jako $d\nu = f\, d\mu$). Wykaż, że rozkład Hahna-Jordana miary ν pokrywa się z miarami $d\nu^+ = f^+\, d\mu$ i $d\nu^- = f^-\, d\mu$.

ROZWIĄZANIE: Oczywiście miary $f^+\, d\mu$ i $f^-\, d\mu$ są nieujemne i dają w różnicy $f\, d\mu$, czyli ν. Wystarczy zbadać ich singularność, a wtedy zadziała jednoznaczność rozkładu Hahna-Jordana. Niech $D = \{x : f(x) \geq 0\}$. Jest jasne, że $\int_D f^-\, d\mu = \int_{D^c} f^+\, d\mu = 0$, a to znaczy, że omawiane miary są singularne.

Zadanie 4. Sprawdź, że jeżeli $\nu \ll \mu \ll \lambda$ i f jest gęstością miary ν względem μ, a g jest gęstością μ względem λ, to iloczyn fg jest gęstością ν względem λ.

ROZWIĄZANIE: Weźmy dowolny zbiór A. Mamy $\nu(A) = \int \mathbf{1}_A f\, d\mu$. Dla dowolnej funkcji h mamy też $\int h\, d\mu = \int hg\, d\lambda$. Wstawiając $h = \mathbf{1}_A f$ dostajemy $\nu(A) = \int \mathbf{1}_A fg\, d\lambda$, czyli z jednoznaczności gęstości, fg jest gęstością ν względem λ.

Zadanie 5. Niech $\mu = f\, d\lambda$ i $\nu = g\, d\lambda$. Sprawdź, że $\mu \wedge \nu = \min\{f, g\}\, d\lambda$ oraz $\mu \vee \nu = \max\{f, g\}\, d\lambda$.

ROZWIĄZANIE: Z definicji, $\mu \wedge \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu - |\mu - \nu|)$. Wiemy już z zadania 3, (zastosowanego do miary $\mu - \nu$), że $(\mu - \nu)^+ = (f - g)^+\, d\lambda$ i $(\mu - \nu)^- = (f - g)^-\, d\lambda$ Stąd

$$|\mu - \nu| = (\mu - \nu)^+ + (\mu - \nu)^- = (f - g)^+ + (f - g)^-\, d\lambda = |f - g|\, d\lambda.$$

Zatem $\mu \wedge \nu = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)\, d\lambda = \min\{f, g\}\, d\lambda$.
Dla $\vee$ rachunek jest identyczny, w jednym miejscu jest plus zamiast minusa.

Tomasz Downarowicz